Movimiento circular uniforme (MCU)

La "previa"

En la naturaleza hay fenómenos que se repiten con cierta regularidad. El día y las estaciones del año son dos ejemplos bien conocidos por todos. Un día alterna entre claridad y oscuridad a intervalos de 24 horas, mientras que un año, en el hemisferio sur, pasa por las estaciones verano, otoño, invierno, y primavera en 365 días[1].

En este curso vamos a tratar uno de los muchos y variados movimientos periódicos: el **movimiento circular uniforme** (MCU). Todos los movimientos periódicos, hablando en general, tienen la particularidad de que:

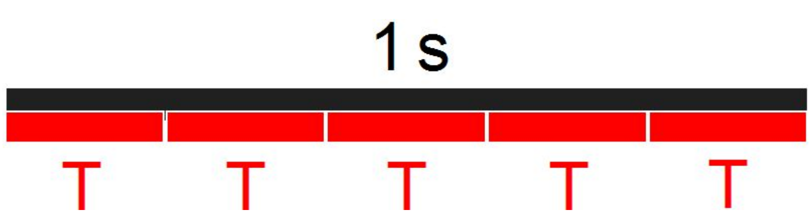
> *Transcurrido cierto intervalo de tiempo mínimo, denominado período o periodo, el movimiento del cuerpo vuelve a repetirse exactamente en posición, velocidad, y aceleración.*

Frecuencia: la inversa del período

Observen la siguiente figura.

La barra roja representa gráficamente el período T de un cuerpo que gira, mientras que la barra negra representa gráficamente un tiempo igual a 1 segundo ($1\,\mathrm{s}$).

En esta otra figura, se **compara** gráficamente 1 período T, con 1 segundo.



De la figura se deduce que 1 periodo T "entra" 5 veces en un segundo ($1\,\mathrm{s}$). Ahora, si 1 período T representa el tiempo que demora un cuerpo con movimiento de rotación en completar una vuelta, lo anterior quiere decir que en 1 segundo el cuerpo dio 5 vueltas completas.

Por otro lado, comparar dos números que representan una misma magnitud (en este caso tiempo) es dividir el mayor entre el menor (justamente para saber cuantas veces entre el "menor" en el "mayor"), o sea:

[1] Salvo que el año sea bisiesto.

$$\frac{1\,\mathrm{s}}{T} = [\text{número de vueltas en un segundo}]$$

Se denomina frecuencia al número de vueltas f dadas en la unidad de tiempo, que en el caso presente, la unidad de tiempo es el segundo.

O sea:

$$f = \frac{1}{T}$$

Observen que **la frecuencia y el período son magnitudes inversas entre sí**, y por lo tanto, si aumenta una, la otra tiene que reducirse con tal de cumplir con la ecuación anterior.

La unidad internacional de la frecuencia es el hertz (se pronuncia "jertz"), y se simboliza como Hz. Una frecuencia de un hertz, en un movimiento circular, significa una vuelta o revolución por cada segundo.

MRU vs MCU

En un movimiento circular uniforme, como indica su nombre, la trayectoria seguida por el cuerpo es circular (obvio, ¿no?). El hecho de ser movimiento uniforme lo hace parecido en cierto aspecto al MRU, ¿se acuerdan?

En un MRU el vector velocidad es constante, lo que implica que el **valor de la velocidad** (su módulo), dirección, y sentido, permanecen constante en el tiempo, y consecuentemente, es el único movimiento NO acelerado.

Así, para calcular la velocidad de un cuerpo con MRU, conocida la distancia d (o x) recorrida en el tiempo t, la velocidad v del cuerpo queda dada por la ecuación:

$$v = \frac{d}{t} \quad \text{o bien:} \quad v = \frac{x}{t}$$

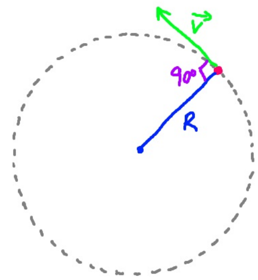
En un MCU, es obvio que la dirección y el sentido de la velocidad del cuerpo cambia permanentemente (esta "doblando" todo el tiempo), por lo que el MCU es un **movimiento acelerado**. Si embargo hay algo en el vector velocidad que permanece constate: su **valor** (su módulo), y es esta característica lo que lo hace uniforme. Como el valor de la velocidad permanece constante, ¡la ecuación anterior sigue valiendo (con algún arreglito) para el MCU! Así la distancia recorrida por el cuerpo coincide con el perímetro de la circunferencia que recorre, es decir:

$$d = 2\pi R$$

y como el valor de la velocidad permanece constante, sería lógico pensar, **que el tiempo que demora en dar una vuelta siempre es el mismo**. A este tiempo que demora en dar una vuelta se le denomina **período** (o periodo), y se lo representa con la letra T. Así cambiando en la ecuación de arriba t por T, resulta que la el valor de la velocidad de un cuerpo con MCU se da por:

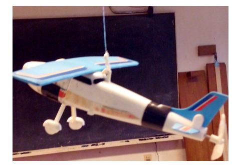
$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Finalmente, el vector velocidad es tangente a la trayectoria en la ubicación del cuerpo, y por lo tanto forma un ángulo de $90°$ con el radio de giro.



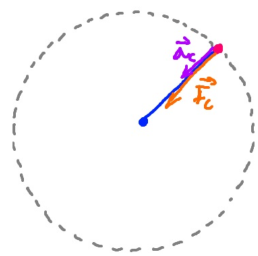
Problema

En el laboratorio medimos (indirectamente) el período $T = 1{,}5\,\mathrm{s}$ del "vuelo"de un avioncito con MCU, y el diámetro de su circunferencia $D = 199{,}7\,\mathrm{cm}$, ¿cuánto vale la velocidad del avioncito?
Tip: Antes de calcular la velocidad, asegurarse de que el radio de giro R este expresado en metros.



Fuerza centrípeta y aceleración centrípeta

Como ya se mencionó más arriba, el MCU es un movimiento acelerado, pues la dirección y el sentido de la velocidad cambian permanentemente. Ahora, para "torcer" al vector velocidad se requiere de una fuerza, que ademas será la responsable de la aceleración.



A esta fuerza dirigida a lo largo del radio de giro "mirando" hacia el centro (ver figura de arriba), se le denomina fuerza centrípeta, y esta dada por la ecuación:

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

que la podemos reescribir de esta otra forma sin cambiar nada:

$$F_c = m\left(\frac{v^2}{R}\right)$$

La cantidad que aparece entre paréntesis representa la aceleración centrípeta, ¿por qué? Supongamos que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza centrípeta, es decir, ¡la fuerza neta coincide con la fuerza centrípeta! Con esta idea en mente, y comparando la ecuación anterior con la segunda ley de Newton podemos concluir que:

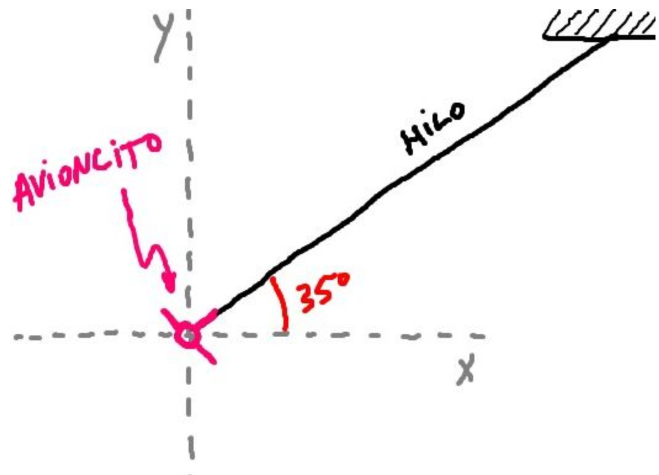
$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Recordando nuevamente la segunda ley de Newton y siguiendo el razonamiento anterior: *la fuerza neta le hereda la dirección y el sentido a la aceleración*, se deduce que la aceleración centrípeta (a lo igual que fuerza centrípeta) también esta dirigida a lo largo del radio de giro "mirando" hacia el centro (nuevamente, ver figura anterior).

Otra cosa a tener en cuenta: La fuerza centrípeta no es una fuerza "nueva", es decir, cualquier fuerza conocida (o aun desconocida por ustedes, como la fuerza de Lorentz que se las presentarán en sexto) que esté en dirección del radio de giro “mirando” hacia el centro, esta cumpliendo el “rol” de fuerza centrípeta. Por ejemplo, la fuerza de gravedad que mantiene a la Luna orbitando entorno a la Tierra, esta cumpliendo la función de fuerza centrípeta.

Problema

En el siguiente bosquejo se representa al avioncito formando un ángulo de $35°$ con la dirección horizontal. Sabiendo que la masa del avioncito es $m = 89{,}1\,\mathrm{g}$, calcular y representar en el dibujo, la fuerza y la aceleración centrípeta.
Tip: Antes da calcular la fuerza centrípeta asegurase de que la masa este expresada en kilogramos.



Velocidad angular o de giro (parte I)

Otra particularidad de los movimientos circulares es su **velocidad angular** (o de **giro**).

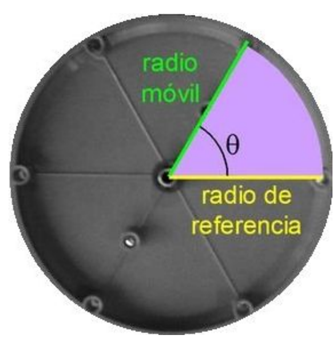
En un MRU, el cuerpo recorre distancia iguales en tiempos iguales.	En un MCU, el radio (imaginario o no) que conecta al cuerpo con el centro de giro, “barre” ángulos iguales en tiempos iguales.

Si θ es el ángulo “barrido” por uno de los radios (tomando como referencia a otro que no se mueve), matemáticamente lo anterior se expresa como:

$$\text{velocidad angular} = \frac{\text{ángulo barrido}}{\text{tiempo en barrer el ángulo}}$$

o en símbolos:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$



Antes de seguir: el radian

La unidad para medir ángulos bien conocida de la escuela es el grado. Sin embargo, en Física y Matemática, es frecuente por cierta conveniencia medir los ángulos en otra unidad: el **radian** (rad). Un ángulo de 1 radian es exactamente igual $360°/\pi$ grados (o aproximadamente a $57{,}3°$), y por lo tanto un giro completo, es decir, $360°$, equivalen exactamente al doble de π, o sea:

$$360° = 2\pi \,\text{rad}$$

Very important: De aquí en más vamos a medir los desplazamientos angulares (la "θ") en radianes.

ÁNGULO (GRADOS)	ÁNGULO (RADIANES)
0	0
90	$\pi/2$
180	π
270	$3\pi/2$
360	2π

Velocidad angular (parte 2)

Por lo tanto, cuando un cuerpo con MCU hace un giro completo (barre $360°$), en un tiempo igual al período T, la velocidad angular del cuerpo será:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

La velocidad angular, como puede deducirse de la ecuación anterior, es el radian por segundo (rad/s).

Preguntas

¿Cuánto vale la velocidad angular del segundero de un reloj, la aguja minutero, y la aguja horaria?, y ¿la velocidad angular de la Tierra?
Tip: antes de calcular la velocidad angular asegurarse que el período esta expresado en segundos.

Velocidad angular (parte 3)

La velocidad angular es una **magnitud vectorial**. *La dirección del vector velocidad angular coincide con la dirección de eje de rotación, y su sentido se determina por la regla de la mano derecha.*

En definitiva

Finalmente, y en concreto y concretando, *todo cuerpo con MCU, se desplaza por la circunferencia con rapidez (=módulo) constante, y gira con velocidad angular… ¡también constante!*

Los promotores de éste parque de diversiones, aseguran que sus hamacas voladoras pueden alcanzar una velocidad de $18\,\mathrm{m/s}$ $(64\,\mathrm{km/h})$, con un radio de giro de $30\,\mathrm{m}$. Suponiendo que la masa total (2 personas + hamaca) es de $160\,\mathrm{kg}$, se pide:

1. Identificar y señalar con un segmento recto, el radio de giro de la hamaca encerrada por el óvalo blanco.
2. Calcular el tiempo de una vuelta (es decir, el período T).
3. Calcular la velocidad de giro (o angular) de las hamacas.
   Tip: recordar que $v = R\omega$.
4. Representar en la captura de imagen de arriba, el peso y la tensión a la que esta sometida la hamaca encerrada por el óvalo blanco, y descomponer la tensión en la dirección horizontal x, y en la dirección vertical y.
5. ¿Cuál de estas fuerzas (o componente de alguna de ellas) cumple el "rol" de fuerza centrípeta?
6. La fuerza centrípeta por definición se da por la ecuación:

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

   Calcular la fuerza centrípeta que actúa sobre la hamaca señalada, y dibujar su vector en la imagen de arriba.
7. Calcular la aceleración centrípeta que experimenta la hamaca y las personas, y dibujar su vector en la imagen de arriba.
8. Calcular, primero el peso de la "hamaca + personas", y luego la tensión que soportan las cadenas.
   Tip: tener en cuenta que el valor de T_x y T_y se pueden determinar sin hacer cálculo (considerar el diagrama de fuerzas), y que $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$.