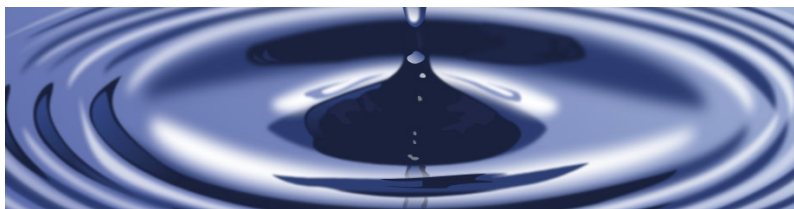


Ondas

Introducción

Antes, algunos ejemplos:

1. Una gota de lluvia al caer en un charco de agua **perturba** el agua (medio material elástico), que da origen a una “olita” (onda superficial de agua) que se propaga por el charco.



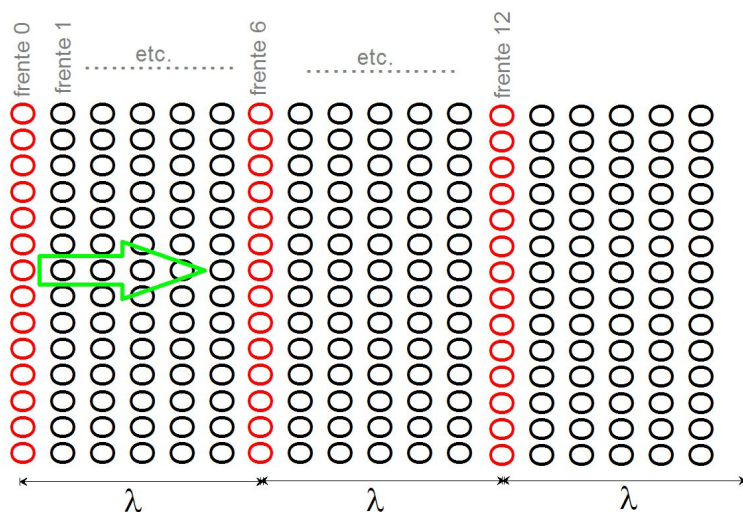
2. El diafragma de una parlante vibra perturbando el aire circundante. Una onda de sonido es una onda de presión. El aire, debido al paso de la onda, se estratifica en capas perpendiculares a la dirección de propagación. Capas de baja densidad, y consecuentemente, de baja presión (rarificaciones), se intercalan con las de alta densidad y presión (compresiones), permutando sus estados con el paso de la onda.
3. Los electrones oscilantes en una antena emisora representan una perturbación en el campo electromagnético, que ellos mismos generan con su carga eléctrica y movimiento, dando así origen a una onda radio.
4. Recientemente se confirmó la existencia de las ondas gravitatorias (17/8/2017), predichas a principio del siglo pasado por la Teoría General de la Relatividad (TGR). Se cree que la perturbación que hizo posible la existencia de la onda detectada, fue consecuencia de la fusión de dos agujeros negros, o la explosión de una kilonova (fusión de un sistema binario de estrellas de neutrones). La explosión, que tuvo lugar a una distancia de 130 millones de años luz, eyectó materia en todas las direcciones a una velocidad de 60 000 km/s. Según la TGR, la gravedad no es una fuerza, sino una deformación local del espacio-tiempo debido a la masa-energía de los cuerpos. Una onda gravitatoria es, por lo tanto, la propagación de una perturbación en el mismísimo espacio-tiempo. La explosión cataclísmica, por la fusión de los agujeros negros o por la explosión de la kilonova, originó una perturbación en el espacio-tiempo suficientemente intensa, como para ser detectada 130 millones de años más tarde en nuestro planeta.

Una onda es la propagación de una perturbación en un medio material o en un campo físico (electromagnético o gravitatorio). Es una forma de movimiento con la consecuente transferencia de energía, cantidad de movimiento, momento cinético, pero sin desplazamientos netos de materia¹.

¹Como “excepción a la regla” se podría citar como ejemplo, la onda de choque producida por una explosión.

Conceptos básicos

La ola del estadio rigurosamente no es una onda, pero puede servir para explicar algunas características básicas de un tipo de onda especialmente simple. Consideremos un sector de la tribuna representado esquemáticamente en la siguiente figura.



Cada círculo representa un espectador. Supongamos que la ola se “propaga” de izquierda a derecha, y que la inician los espectadores representados con círculos rojos situados a la izquierda de la figura.

Éstos de forma sincronizada se levantan y se sientan en sus respectivos asientos en tiempos regulares. A este tiempo se le denomina **período** (T), y al número de veces que se paran y sientan, es decir, completan un ciclo de la “oscilación” en la unidad de tiempo², se le denomina **frecuencia** (f). Notar que:

$$f \cdot T = 1$$

Como estos espectadores se encuentran en movimiento “oscilatorio” sincronizado, se dice que oscilan en **fase**. Así, todos los espectadores que oscilan en fase constituyen un **frente de onda** (en la figura, el “frente 0”).

Al cabo de un tiempo igual al período, la ola llega al frente de onda 6. Los espectadores que forman el “frente 6” se levantan y se sientan en sincronía con los del “frente 0”, razón por la cual se dice que los espectadores del “frente 0” adelantan en fase a los “frente 6” en 2π radianes, u oscilan con una diferencia de fase, $\Delta\varphi$, igual a 2π radianes (o sea: $\Delta\varphi = 2\pi$). Esto último no significa otra cosa que los espectadores del “frente 0” se levantaron y sentaron una vez más que los del “frente 6”, o dicho de otra forma: los espectadores del “frente 0” aventajan en un ciclo a los espectadores del “frente 6”.

A la distancia entre los “frente 0” y “frente 6” se le denomina **longitud de onda** (λ).

Al cabo de un tiempo igual $t = 2T$, la ola estaría llegando al “frente 12”, situado a una distancia de 2λ del “frente 0”. La diferencia de fase entre el “frente 0” y el “frente 12” es $\Delta\varphi = 4\pi$, lo que se interpreta como: los espectadores del “frente 0” se levantaron y sentaron 2 veces antes de que la ola llegue al “frente 12”.

²Normalmente 1 segundo, poco conveniente para este ejemplo.

Adicionalmente, para este caso simple, se puede definir la velocidad de fase (v_f) con la que se propaga la ola como:

$$v_f = \frac{d}{t} = \frac{\lambda}{T}$$

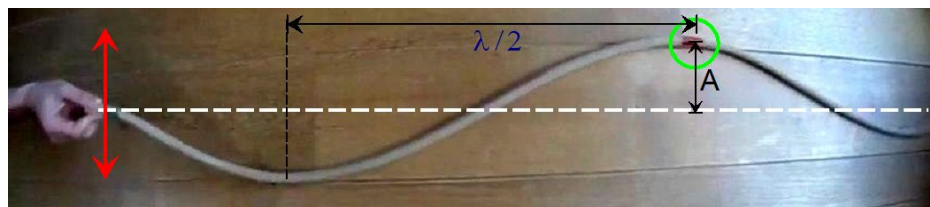
Un ejemplo bien conocido por todos: ondas en cuerdas

Aquí el video donde puede ver la onda en “acción”. En el video se puede observar, que el extremo izquierdo de la cuerda esta sometido a una oscilación armónica “bastante” periódica (con frecuencia bien definida). La siguiente foto es una captura de imagen de la onda propagándose por la cuerda en un cierto instante de tiempo (tiempo “congelado”). En la imagen se muestran dos frentes de ondas: segmentos rectos y paralelos entre sí, y **perpendiculares a la dirección propagación de la onda**.



Notar que las dos secciones transversales elegidas **oscilan en fase** (en “sincronía”), y por ser frentes de ondas **consecutivos en “sincronía”**, la distancia entre ellos es de una longitud de onda.

En la misma imagen, ahora con una línea punteada blanca, se pretende representar la posición de equilibrio de cada sección transversal de la cuerda.



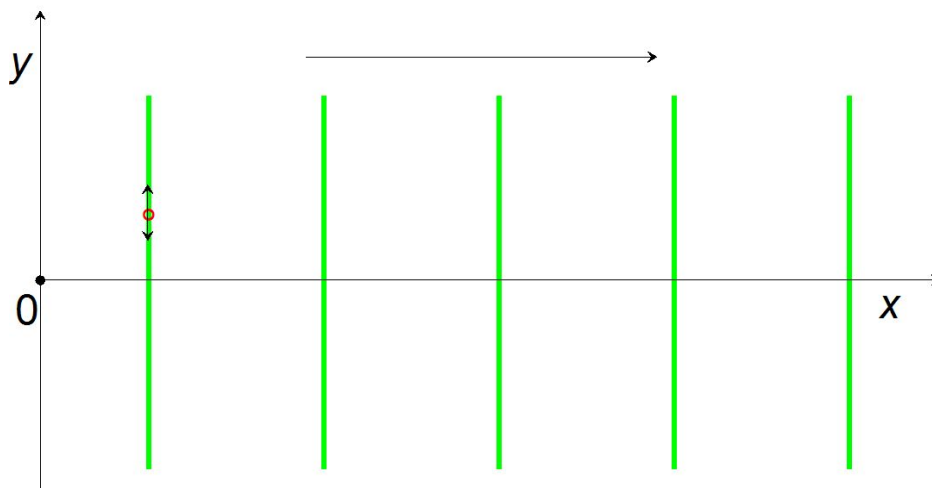
También en la imagen se señala una sección transversal (rodeada por un círculo verde), **que en ese instante de tiempo** alcanzó la amplitud de su oscilación, convirtiéndose así en una “cresta” de la onda, en oposición de fase con el “valle” más inmediato a su izquierda, y separados entre sí por media longitud de onda ($\lambda/2$).

Ondas armónicas planas (OAP)

Una onda armónica plana implica que:

1. sus frentes de ondas son planos paralelos entre si, y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda;
2. “armónica” es sinónimo de **monocromática**, un color, una frecuencia,
3. las amplitudes de las oscilaciones son constantes.

Consideremos un punto (partícula) cualquiera del primer frente de ondas (circulo rojo).



Este punto oscila, supongamos, perpendicularmente a la dirección de propagación (eje $\vec{x}$) respecto a su posición de equilibrio. Sea y la distancia vertical medida desde su posición de equilibrio, denominada **elongación**. La amplitud A de las oscilaciones representan el máximo valor de la elongación (o apartamiento) respecto a su posición de equilibrio, ya sea en este caso, por encima o por debajo de dicha posición de equilibrio, o sea:

$$A = | \pm y_{max} |$$

donde el signo positivo, en este ejemplo, significa por encima de la posición de equilibrio, y el negativo, por debajo de dicha posición.

Notar que la elongación que tiene un punto de un frente de onda en un instante determinado, queda definida por una función $y = y(x, t)$, donde x localiza el frente de onda al que pertenece el punto, t representa el instante de tiempo en el que se “congela” la posición del punto. Observar además que todos los puntos pertenecientes a un mismo frente de onda tienen el mismo valor de x . Naturalmente que todo lo dicho tiene sentido en un sistema de referencia elegido convenientemente (ver figura).

La elongación de cualquier punto de una OAP matemáticamente tiene la forma:

$$y(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{T}t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0 \right)$$

o equivalentemente:

$$y(x, t) = A \cos \left(\frac{2\pi}{T}t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0 \right)$$

Si la OAP se propaga hacia la derecha debe considerarse el signo negativo, y viceversa si se propaga hacia la izquierda. φ_0 o φ'_0 representa la **constante de fase**. El propósito de la **constante de fase** es la de determinar la elongación de los puntos del frente de onda correspondiente a $x = 0$, en $t = 0$. Siempre es posible “ajustar el cronómetro” para que se cumpla $\varphi_0 = 0$. Más aun, el argumento: $\frac{2\pi}{T}t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0$, representa la **fase** de la OAP, que no es otra cosa que un ángulo variable expresado convenientemente en radianes.

Como el coseno es una función par se cumple que: $\cos(-\text{fase}) = \cos(\text{fase})$, por lo que debido a esta ventaja se usará la segunda ecuación para una OAP.

Observar que hay una doble “periodicidad”: temporal, dada por T , y espacial dada por λ .

Se definen la **frecuencia cíclica** ω , y el **número de onda cíclico** k , respectivamente como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

A continuación se hace un paralelo entre las magnitudes relacionadas con la periodicidad temporal y espacial de una OAP.

periodicidad temporal	periodicidad espacial
T	λ
$f = 1/T$	$\sigma = 1/\lambda$
$\omega = 2\pi/T$	$k = 2\pi/\lambda$

Notar que el número de onda σ se define como el inverso de la longitud de onda λ , y que casi nunca se usa.

Observar que combinando las siguientes ecuaciones:

$$v_f = \frac{\lambda}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

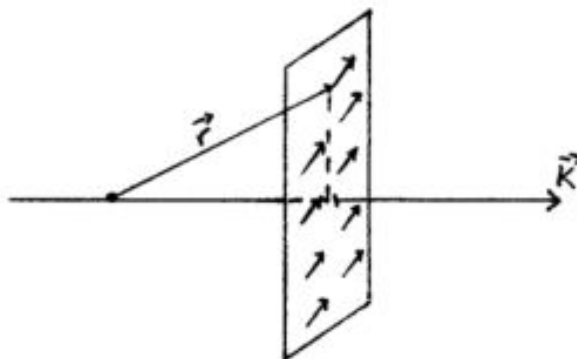
alternativamente se deduce que:

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

La forma “matemática” de la OAP que vamos a usar en este curso, suponiendo que se propaga hacia la derecha, y que para más simplicidad asumimos³ que $\varphi_0 = 0$, queda como:

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (1)$$

El número de onda cíclico es el módulo del **vector de ondas** $\vec{k}$, cuya dirección y sentido coincide localmente con la dirección y el sentido de propagación de la onda.



³Siempre se puede “ajustar” el cronómetro para lograr que la fase inicial sea cero.

Más aún, el vector $\vec{k}$ es **localmente tangente** al rayo que corta en un punto al frente de onda considerado.

Por otro lado, si $\vec{r}$ es el radio vector de un punto arbitrario de un frente de onda cualquiera (ver figura superior), la ecuación anterior toma la forma más general:

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

dónde ahora $\psi(\vec{r}, t)$ denota la elongación de la oscilación de un punto perteneciente a cierto frente de onda, localizado por el vector posición $\vec{r}$ en el instante t .

Notar que el punto entre $\vec{k}$ y $\vec{r}$ denota el **producto escalar** entre los dos vectores. En el caso presente, como la OAP se propaga horizontalmente de izquierda a derecha, $\vec{k} = k\hat{x}$ y $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, por lo que: $\vec{k} \cdot \vec{r} = kx$ re-obteniéndose la ecuación (1) como un caso especial.

“Monocromaticidad” y Ondas Reales

Hay que tener presente que las OAP no tienen realidad física: son objetos matemáticos. No existe en la naturaleza ondas monocromáticas o monofrecuenciales como las OAP. Así por ejemplo, la luz natural (blanca) esta formada por todo los colores. A cada color **idealmente** le corresponde una OAP con un frecuencia determinada, con valores crecientes de frecuencia desde el color rojo al color azul. A este ordenamiento se le denomina **espectro visible**.

Color	Frecuencia (THz)
rojo	de 385 a 484
anarajado	de 484 a 500
amarillo	de 500 a 517
verde	de 517 a 612
azul	de 612 a 667
violeta	de 667 a 789

Notar que, cuando se trata de luz, la frecuencia suele expresarse en THz (terahertz). Aquí el prefijo “T” representa al múltiplo “tera”, y su relación con el hertz es: $1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$.

De la tabla superior, se deduce que la menor frecuencia del espectro visible es $f_{\min} = 3,85 \times 10^{14} \text{ Hz}$ y la mayor es $f_{\max} = 7,89 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Así el ancho de banda para la luz blanca se da por: $\Delta f = f_{\max} - f_{\min} = 4,04 \times 10^{14} \text{ Hz}$. En contraste, el ancho de banda de la luz láser roja es del orden $\Delta f = 0,1 \times 10^6 \text{ Hz}$, o sea, 4000 millones de veces menor al de la luz natural, algo que se puede aceptar razonablemente como luz monocromática comparada con las luz natural, **pero no rigurosamente monocromática** ya que su ancho de banda no es nulo ($\Delta f \neq 0$).

Matemáticamente el dominio de existencia de una OAP es infinito (ver ecuación (1)), tanto para la variable espacial como para el tiempo: es una “onda infinita y eterna”. Sin embargo, *una onda real puede considerarse formada por una superposición de un número finito o infinito de ondas armónicas planas, y viceversa, una onda real se puede descomponer en un número finito o infinito de ondas armónicas planas.*

Paquetes de ondas, Medios Dispersivos, y Velocidad de Grupo

Como ya se menciona al final de la sección anterior, una onda real se puede considerar formada por la superposición⁴ de un número finito o infinito de ondas armónicas planas, de aquí que puedan considerarse como **paquetes de ondas** armónicas.

Un ejemplo familiar de paquete de ondas son las “olitas” de agua, que se forman cuando se deja caer un objeto lo suficientemente pesado y pequeño en un estanque, o las que se forman en los charcos un día de lluvia. Al principio todas las ondas armónicas que componen la “olita” están “apiñadas” en el punto de origen, para luego comenzar a diverger de este. Sin embargo a medida que la “olita” se aleja del origen, esta progresivamente se va ensanchando y perdiendo altura hasta desaparecer. Esto último es debido al efecto combinado de la absorción⁵ y de la dispersión del medio.

*Un medio se dice que es **dispersivo** si la velocidad de fase de las ondas armónicas componentes dependen de la frecuencia*, es decir:

$$v_f = v_f(\omega) \quad (\text{tener en cuenta que: } \omega = 2\pi f)$$

o bien:

$$\omega = \omega(k) \quad \text{o} \quad k = k(\omega) \quad (\text{relación de dispersión})$$

Así cada onda armónica componente tendrá una velocidad de fase, y por lo tanto se tendrán ondas rápidas y ondas lentas. Las ondas rápidas adelantarán a las mas lentas, haciendo que la “olita” progresivamente pierda su equilibrio interno, para finalmente atenuarse totalmente.

La velocidad a la que se propaga (en el caso presente) la “olita” se denomina **velocidad de grupo** (v_g). Dependiendo de si el medio es o no dispersivo, se cumple las siguientes relaciones:

- si el medio no es dispersivo: $v_g = v_f$; y
- si el medio es dispersivo: $v_g > v_f$ o $v_g < v_f$.

En cualquier caso se cumple para las ondas electromagnéticas que:

$$v_g v_f = c^2 \quad \text{o bien:} \quad c = \sqrt{v_g v_f}$$

siendo c la velocidad de propagación de la luz en el vacío.

Si se desea transmitir información mediante una onda, por ejemplo, mediante la modulación de una onda electromagnética, la información se propaga a la misma velocidad a la que se propaga el cambio en el campo electromagnético. Esta velocidad suele ser casi igual a la velocidad de grupo.

⁴Siempre que el medio sea lineal.

⁵La absorción tiene que ver, en el caso presente, con la viscosidad (rozamiento interno del agua) y con la consecuente pérdida de energía de las ondas componentes.