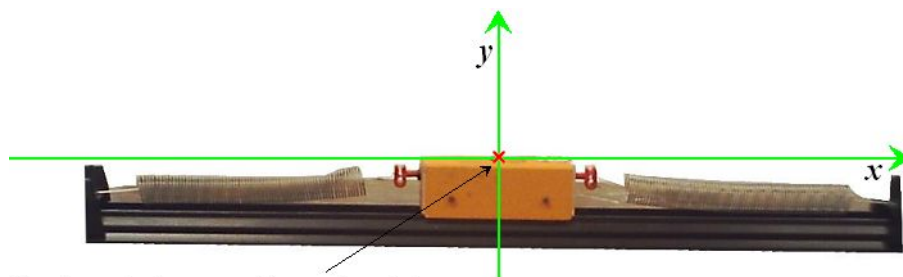


1. Movimiento oscilatorio (part. 1)

1.1. Movimiento armónico simple

Un movimiento oscilatorio es un movimiento de “vaivén”, como por ejemplo, el seguido por un carrito de laboratorio tal como se muestra en la siguiente foto.

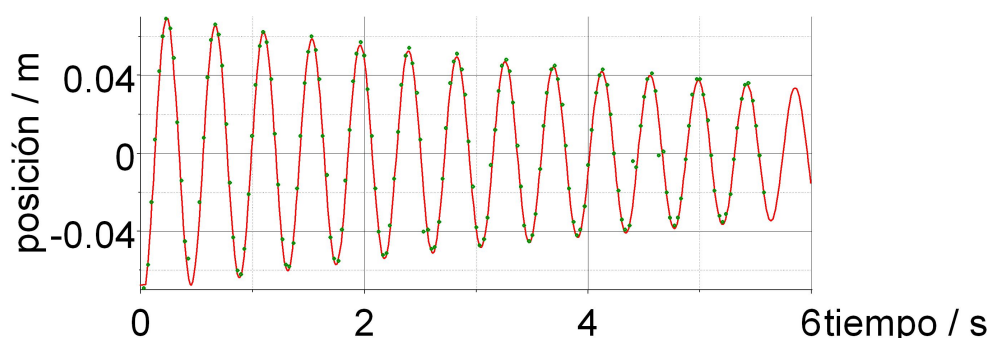


Punto del carrito elegido para su seguimiento sobre el eje x .
En este momento se encuentra en la posición de equilibrio.

Para estudiar el movimiento del carrito se puede filmar, para luego analizar el movimiento de un punto en particular. En la foto, el punto elegido se marca con una cruz roja, y es por dicho punto que se trazan los ejes de coordenadas. Como todo el movimiento del punto elegido tiene lugar sobre el eje x , el eje y se puede obviar (movimiento unidimensional).

En el momento en que se tomó la foto, el punto en cuestión (y todo el carrito), se encuentra en su posición de equilibrio. Si se desplaza el carrito hacia la izquierda el punto ahora se encontrará a cierta distancia respecto a su posición de equilibrio. A esta distancia se la denomina **amplitud**. Al soltar el carrito este comenzará a moverse por la acción de las fuerzas de los resortes que están unidos a él, aunque no son las únicas fuerzas que están actuando.

Analizando el movimiento del punto marcado con la cruz roja se consigue la siguiente gráfica de **posición** contra **tiempo**.



Los puntos verdes en la gráfica representan la posición de la cruz roja en un instante determinado correspondiente a un fotograma del video. La curva roja que “enhebra” cada punto verde es la **curva de tendencia** generada por el programa (XLPlot). La expresión analítica de esta curva, también determinada por el programa, tiene la forma:

$$x(t) = 0,072 \cdot e^{-0,13 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 2,3 \cdot t + 1,9)$$

La ecuación escrita en su forma general tendrá la forma:

$$x(t) = Ae^{-\beta \cdot t} \sin(2\pi ft + \varphi_0)$$

Comparando las dos ecuaciones resulta:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 0,072 \text{ m} \\ \beta &\rightarrow 0,13 \text{ rad/s} \\ f &\rightarrow 2,3 \text{ Hz} \\ \varphi_0 &\rightarrow 1,9 \text{ rad} \end{aligned}$$

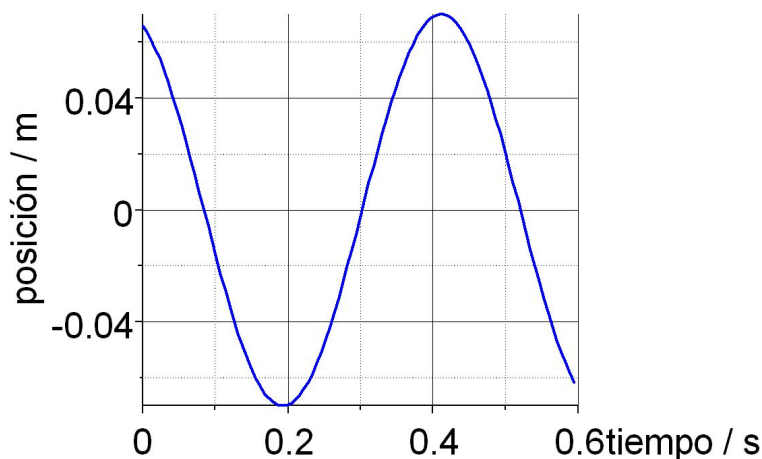
De la relaciones anteriores tenemos a la amplitud A , que en el caso presente vale 0,072 m, es decir, 7,2 cm, lo que nos indica que al principio (en $t = 0$ s) el máximo apartamiento de la cruz roja respecto a su posición de equilibrio es precisamente 7,2 cm.

Notar que a medida de que transcurre el tiempo las posiciones más extremas (máximos y mínimos) de la cruz roja progresivamente se acercan a la posición de equilibrio, es decir, la “altura” de los máximo y los mínimos se reduce. Esto último se debe al factor $e^{-\beta \cdot t}$ que de momento no será de interés. A modo de adelanto el factor $e^{-\beta \cdot t}$ tiene relación con las otras fuerzas no debida a los resortes encargadas de disipar la energía del sistema “carrito + resortes”, con el progresivo frenado del carrito hasta su detención.

Si “reemplazamos” el factor $e^{-\beta \cdot t}$ por un “1”, lo que estamos haciendo es eliminar a todas las fuerzas de rozamiento que puedan estar actuando sobre el carrito, y por supuesto, eliminando cualquier posibilidad de que la energía mecánica del carrito se “fugue” al ambiente. En tal caso la ecuación general se reduce a una forma más simple:

$$x(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi_0)$$

a la que le corresponde la siguiente gráfica posición contra tiempo.



Si el carrito se mueve según la ecuación recuadrada, diremos que se trata de un movimiento armónico simple (MAS).

Observar que a diferencia del movimiento anterior:

En un MAS la amplitud permanece constante en el tiempo, que es una característica de este movimiento oscilatorio.

Esto ultimo es consecuencia de que:

En un MAS no existe disipación de energía, lo que a su vez implica que solo actúan sobre el cuerpo fuerzas conservativas, por lo que el movimiento en teoría continuaría indefinidamente.

En cualquiera de las ecuaciones anteriores la “ f ” representa la **frecuencia**.

La frecuencia en un MAS mecánico representa el número de oscilaciones dada por el cuerpo (carrito) en la unidad de tiempo.

La unidad internacional de la frecuencia es el hertzio (Hz), es decir, una oscilación o ciclo por cada segundo. En el caso presente $f = 2,3 \text{ Hz}$, lo que significa que el carrito no llega a completar 3 oscilaciones o ciclos completos en un segundo.

Finalmente φ_0 representa la **constante de fase**, y es un ángulo expresado en **radianes**¹.

La constante de fase está relacionada a la posición que tiene el cuerpo en el instante inicial ($t = 0 \text{ s}$).

Así por ejemplo, si $\varphi_0 = 0 \text{ rad}$, significa que en el instante inicial ($t = 0 \text{ s}$), el cuerpo se sitúa en la posición de equilibrio.

Más aun:

A la cantidad $2\pi ft + \varphi_0$ se denomina fase, y se la puede interpretar como un ángulo variable en el tiempo expresado en radianes.

¹Tener presente que un radián aproximadamente igual a $57,3^\circ$

1.2. Período, frecuencia, y frecuencia angular

El período o periodo (T) se define como:

El tiempo requerido para completar una oscilación o ciclo.

El periodo se mide en segundos, y se relaciona con la frecuencia mediante la ecuación:

$$T = \frac{1}{f}$$

La **frecuencia angular** (ω) es 2π veces la frecuencia, es decir:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{o bien:} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

y su unidad internacional es el **radián por segundo** (rad/s).

Observar la similitud no casual y casi total, con la velocidad angular definida para los movimiento circulares.

Con estas nuevas definiciones la ecuación recuadrada alternativamente se puede escribir como:

$$x(t) = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0 \right)$$

o bien:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

1.3. Aceleración de un MAS

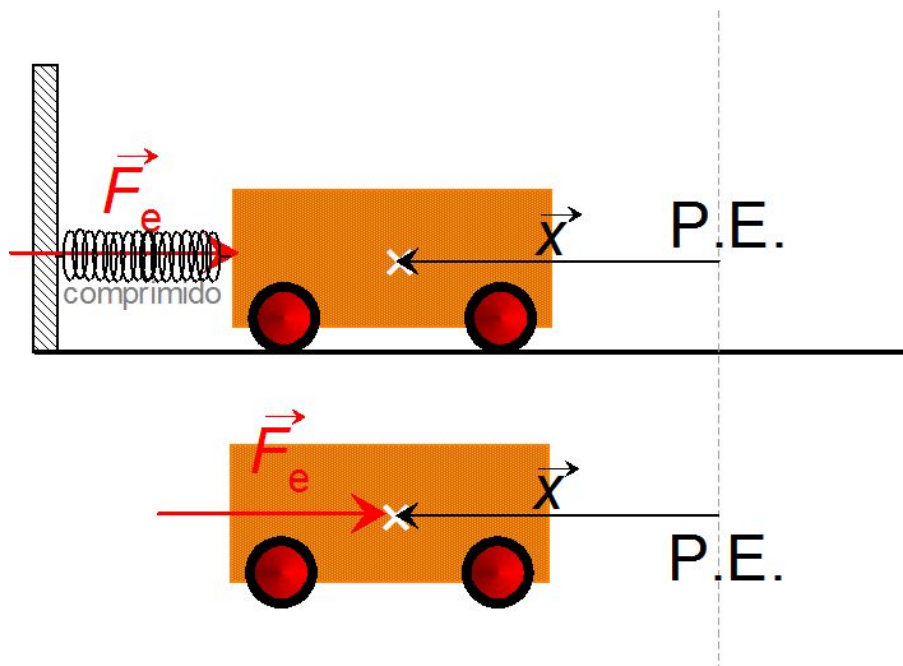
Se puede demostrar que la aceleración del carrito, o de cualquier otro cuerpo con MAS, se relaciona con su posición en cada instante de tiempo $x(t)$, mediante la ecuación:

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Observar que a diferencia de los movimiento estudiados hasta ahora, la aceleración en este caso es variable en el tiempo y no constante. El signo negativo indica que el **vector** aceleración se orienta en sentido contrario al vector posición. éste último se traza desde la posición de equilibrio hasta la posición actual del cuerpo.

1.4. Sistema masa-resorte

Consideremos un carrito de laboratorio con masa m , unido a un solo resorte que puede estirarse y comprimirse a diferencia del que se mostró en clase (ver figura), y con constante de elasticidad k .



Supongamos además que sobre el carrito no actúa ninguna fuerza de rozamiento. En estas condiciones, la única fuerza generadora de movimiento es la fuerza elástica, $\vec{F}_e = -k\vec{x}$, debida al resorte. El signo $(-)$ que figura en la ecuación anterior, denota el hecho de que la fuerza elástica tiene sentido contrario al vector posición $\vec{x}$ del carrito, **que tiene por origen la posición de equilibrio (P.E.)**.

Esta fuerza tiene la particularidad de ser restauradora (y conservativa), y por ser la única fuerza generadora de movimiento, el carrito se moverá con un MAS.

Que una fuerza sea restauradora, significa que siempre estará dirigida hacia la posición de equilibrio (en este caso del carrito) con la particularidad de que su intensidad depende de lo apartado que esté el carrito respecto a la posición de equilibrio. **Vale recalcar que estando el carrito en la posición de equilibrio (el resorte no está ni estirado ni comprimido) la fuerza elástica es nula.**

En estas condiciones, la fuerza neta que actúa sobre el carrito se reduce a la fuerza elástica: $\vec{F}_e = -k\vec{x}$ (ley de Hooke para “resortes”). Por otro lado, por la segunda ley de Newton tenemos que: $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$. Combinado estas ecuaciones resulta que:

$$ma = -kx$$

Como el carrito se mueve según un MAS, además sabemos que:

$$a = -\omega^2 x$$

Sustituyendo esta ecuación en la anterior resulta que:

$$-m\omega^2 x = -kx, \quad \text{o bien:} \quad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

De la última ecuación, y recordando que el período, T , se vincula con la frecuencia cíclica, ω , mediante la ecuación $T = 2\pi/\omega$, se deduce que:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Cuestión 1. Un carro de laboratorio con masa $m = 0,500 \text{ kg}$ está sujeto a un resorte. Debido a la fuerza elástica, el carro se mueve con un MAS, cuya elongación se da por $x(t) = 5 \sin(\pi t) \text{ cm}$. Calcular el valor de la fuerza elástica al cabo de $t = 0,167 \text{ s}$ de haber empezado a moverse.

Cuestión 2. Una pesa con masa igual a 10 kg está colgado de un resorte. Determinar el período de las oscilaciones de la pesa sabiendo que el resorte se estira $1,5 \text{ cm}$ cuando se lo somete a la acción de una fuerza de $9,8 \text{ N}$.

Cuestión 3. La longitud del hilo de un péndulo es $l = 2 \text{ m}$, y se desvía de la vertical 4° . El período del péndulo se da por: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Hallar la velocidad de la bola cuando pasa por su posición de equilibrio.