

2. Movimiento oscilatorio (part. 2)

2.1. Introducción

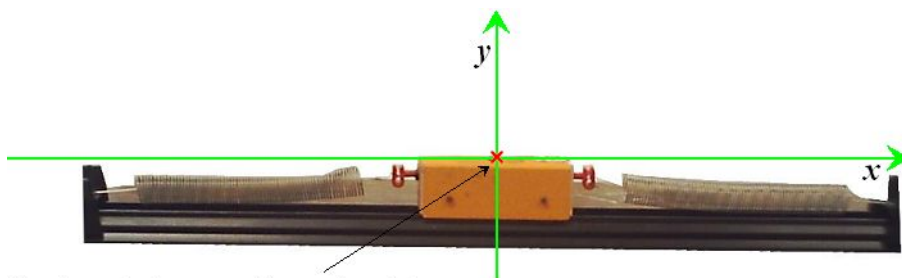
Hasta ahora las oscilaciones eran libres, es decir: Sobre el cuerpo la única fuerza generadora del movimiento era una fuerza restauradora. Si se trata de un sistema masa-resorte, la fuerza restauradora es la fuerza elástica, $\vec{F}_e$, debida al resorte; y si se trata de un péndulo, la fuerza restauradora es la componente del peso en la dirección del movimiento $\vec{P}_x$; ambas fuerzas, como toda fuerza restauradora, “mirando” hacia el punto de equilibrio.

En estas condiciones el cuerpo tendrá un MAS, y preservará este estado de movimiento de forma indefinida, ya que la energía que porta el cuerpo (sistema) no tiene como disiparse, es decir: su valor se conserva constante en el tiempo.

Ahora, en una situación normal, sobre un cuerpo que oscila además de la fuerza restauradora generadora del movimiento, también actúa una fuerza opositora al movimiento de éste, que es disipadora de su energía, es decir:

El valor de la energía del cuerpo se reduce con el paso del tiempo hasta hacerse nula, con la consecuente extinción del movimiento.

Esta fuerza está relacionada con la fricción que surge entre el cuerpo y el medio material en el que se mueve. Como ejemplo, podemos considerar el carrito de laboratorio sometido a las fuerzas elásticas de dos resortes que solo se pueden estirar, y a la fuerza opositora (o resistente), que surge entre el carrito y el aire por el que se mueve.



Punto del carrito elegido para su seguimiento sobre el eje x .
En este momento se encuentra en la posición de equilibrio.

A estas fuerzas de fricción, se les denomina **fuerzas viscosas**.

Las fuerzas viscosas dependen de la rapidez a la que se mueve el cuerpo, y su sentido siempre es opuesto al sentido de la velocidad: de aquí que sea una fuerza opositora al movimiento del cuerpo.

Que las fuerzas viscosas dependan de la rapidez del movimiento, significa que su intensidad (la de la fuerza) aumenta con dicha rapidez. El caso más simple de fuerza viscosa, $\vec{F}_{vis}$, tiene la forma:

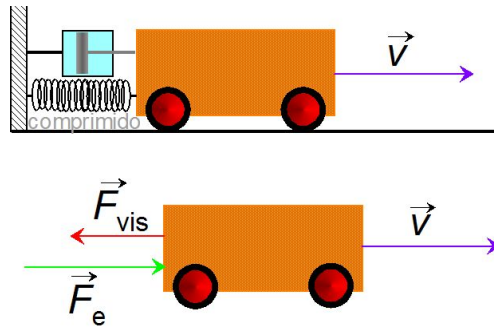
$$\vec{F}_{vis} = -b\vec{v}$$

donde el signo $(-)$ que figura en esta ecuación, da a entender que la fuerza $\vec{F}_{vis}$ tiene sentido opuesto a la velocidad $\vec{v}$.

La constante b representa una cantidad positiva denominada **coeficiente de fricción viscosa**, y su valor depende de la naturaleza del medio y de las condiciones ambientales del momento. De la ecuación anterior se deduce (comprobarlo) que la unidad del coeficiente de fricción viscosa es el **kilogramo por segundo** ($=\text{kg/s}$).

2.2. Sistema masa-resorte amortiguado

Como modelo sencillo podemos considerar el siguiente sistema masa-resorte. Al cuerpo con masa m , está unido un resorte con constante de elasticidad, k , y un “amortiguador hidráulico” con coeficiente de viscosidad, b , que “**simbólicamente**” representa al medio material responsable de la fuerza viscosa que actúa sobre el dicho cuerpo.



En tal caso, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo tiene la forma:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_e + \vec{F}_{vis} = -k\vec{x} - b\vec{v}$$

Por otro lado, sabemos por la segunda ley de Newton, que: $F_{neta} = ma$. Combinado esta ecuación con la anterior resulta que:

$$m\vec{a} = -k\vec{x} - b\vec{v}, \quad \text{o bien:} \quad \vec{a} = -\left(\frac{k}{m}\right)\vec{x} - \left(\frac{b}{m}\right)\vec{v}$$

La cantidad k/m es igual al cuadrado de la **frecuencia angular natural** de un MAS, y por lo tanto:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{frecuencia angular natural})$$

El término que figura en el segundo par de paréntesis:

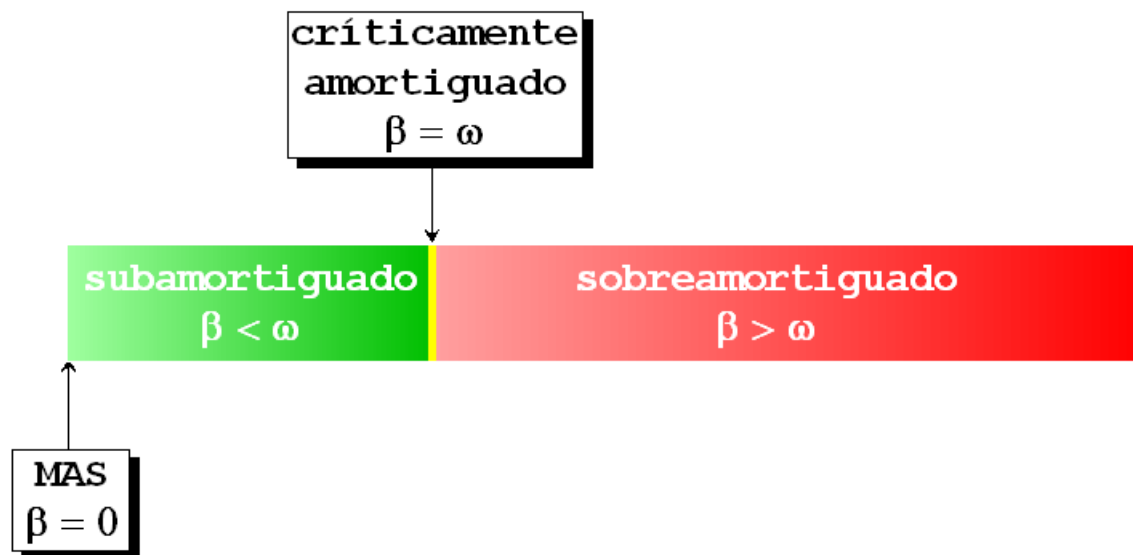
$$\frac{b}{m} = 2\beta, \quad \text{o:} \quad \beta = \frac{b}{2m} \quad (\text{coeficiente de amortiguamiento})$$

siendo β una cantidad positiva denominada **coeficiente de amortiguamiento**. Su unidad internacional es el **radian por segundo** ($=\text{rad/s}$), la misma unidad empleada para la frecuencia angular.

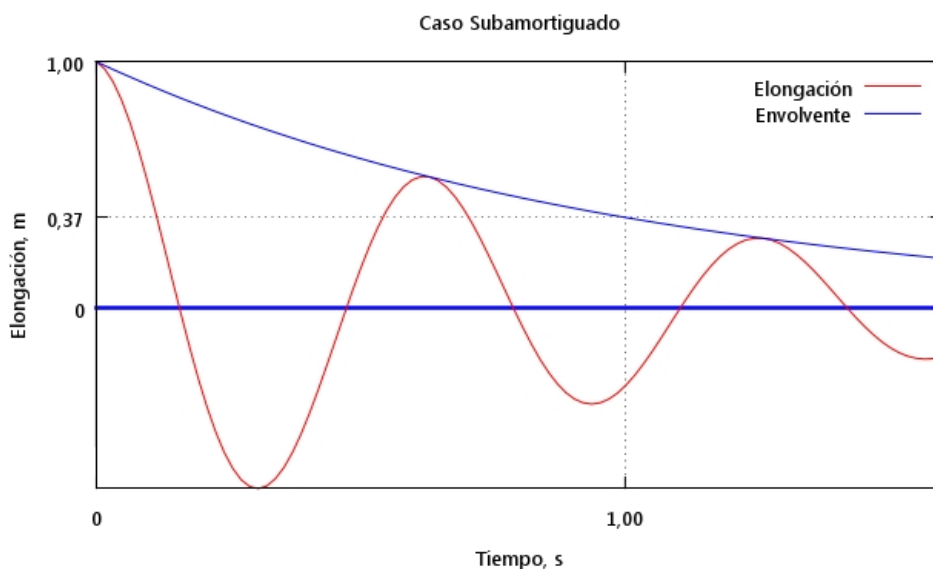
2.3. Oscilaciones amortiguadas

En dependencia del valor del coeficiente de amortiguamiento, β , en comparación con el valor de la frecuencia cíclica natural ω_0 , se tienen tres caso de amortiguamiento:

1. **Subamortiguado** ($\beta < \omega_0$)
2. **Críticamente amortiguado** ($\beta = \omega_0$)
3. **Sobreamortiguado** ($\beta > \omega_0$)



En general las oscilaciones amortiguadas no son periódicas, y en particular en el caso subamortiguado, la elongación¹ al cabo de un tiempo igual a un “período” no recupera su valor inicial: Se hace cero variando en el mismo sentido (aumentado ($x > 0$) ó disminuyendo ($x < 0$), y alcanzando los máximos y los mínimos pero siempre con valores decrecientes (ver gráfica).



¹Esto ocurre también con la velocidad y la aceleración.

A este “período” se le denomina **período convencional**, T_{conv} , para distinguirlo del verdadero período, T , asociado al MAS. Para el caso **subamortiguado**, el período convencional se define como:

$$T_{conv} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\Omega}$$

y a la cantidad: $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \Omega$, se le denomina **frecuencia convencional**.

El periodo convencional y la frecuencia convencional están definidas únicamente para el caso subamortiguado.

¿Porqué no es posible (o no tiene sentido) definir el período convencional y la frecuencia convencional, para los casos críticamente amortiguado y sobreamortiguado? Para responder a esta pregunta tomar en cuenta la definición del período convencional y de la frecuencia convencional, así como también la relación existente entre ω y β para cada caso.

Volviendo al caso subamortiguado, se define el **tiempo característico**, τ , como:

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

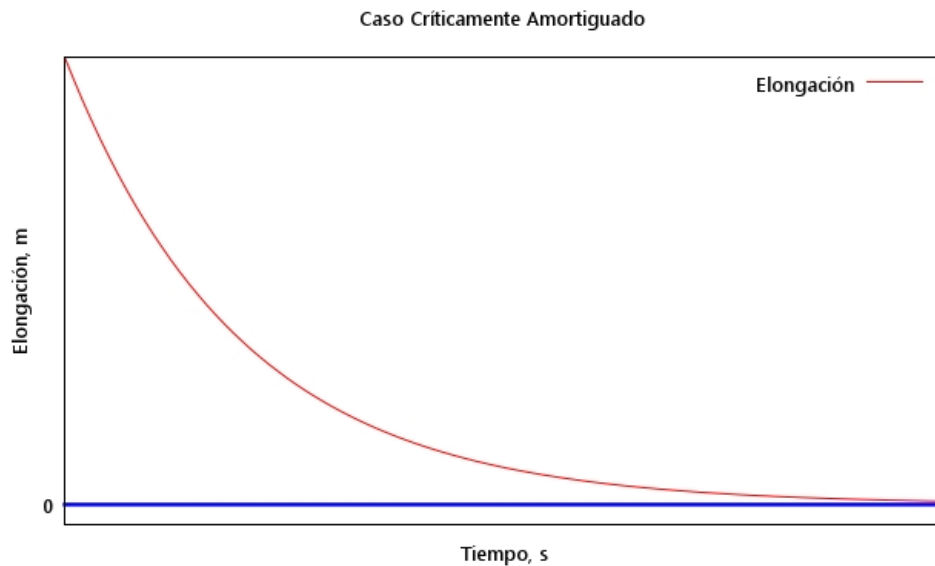
Al cabo de un tiempo igual al tiempo característico, ($t = \tau$), la ordenada de la curva envolvente (representada en color azul, ver gráfica) decae aproximadamente a un 37 %. En el caso de la gráfica de arriba, el tiempo característico de la oscilación es igual a 1 s. Esto significa (para este ejemplo) que a intervalos iguales a 1 s, la amplitud decrece 37 % por vez hasta hacerse nula (matemáticamente) después de un tiempo “infinito”².

Cuestión. Sabiendo que la frecuencia cíclica vale 10 rad/s, y que el tiempo característico es igual a 1 s, hallar el coeficiente de amortiguamiento, el período convencional y la frecuencia convencional del movimiento subamortiguado de la gráfica anterior.

Resp.: $\beta = 1 \text{ s}^{-1}$, $T_{conv} = 0,63 \text{ s}$, $\omega_{conv} = 9,95 \text{ rad/s}$.

Un oscilador críticamente amortiguado tiende al equilibrio más rápidamente que en cualquiera de los otros dos casos, tal como se ilustra en la siguiente gráfica.

²Lo cual físicamente no tiene sentido, ya que el límite lo ponen las dimensiones atómicas, y por lo tanto la amplitud de estas oscilaciones se hace cero en un tiempo finito.



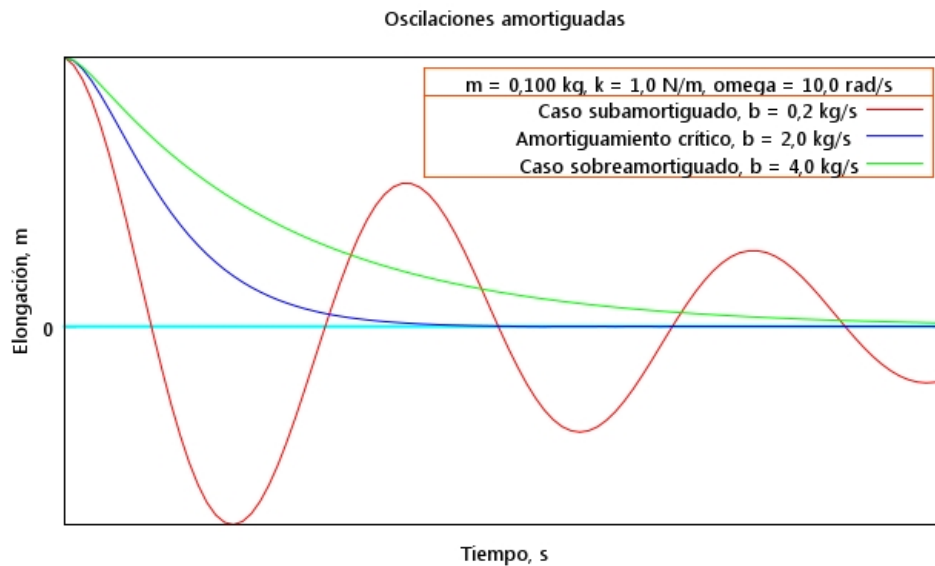
Esto es especialmente importante y útil para el diseño de algunos sistemas oscilatorios. De ejemplo de aplicación de este tipo de sistemas oscilatorios sirven los amortiguadores de puertas.



Estos amortiguadores se regulan mediante un tornillo, para que la puerta cuando se la suelta, toque el marco sin golpearlo.

Finalmente tenemos el caso de sobreamortiguado, donde el sistema no llega a oscilar para tender al equilibrio más lentamente respecto al caso críticamente amortiguado.

A continuación se dan tres gráficas correspondientes a distintos valores del coeficiente de fricción viscosa b . En esta gráfica se puede apreciar las diferencias entre los distintos casos de amortiguamiento.



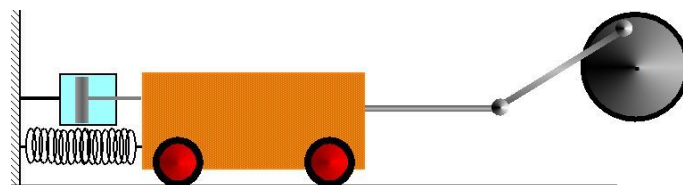
Oscilaciones forzadas

Es un hecho de la realidad cotidiana, que observar a un cuerpo con un MAS **sostenido en el tiempo**, es difícil sino imposible. En el mejor de los casos, según lo observado en el laboratorio, lo más próximo a un MAS es un movimiento oscilatorio subamortiguado **débilmente** amortiguado, es decir, con un coeficiente de amortiguamiento próximo a cero ($\beta \approx 0$).

Lo anterior se explica por la inevitable disipación espontánea e irreversible de energía, desde el sistema oscilante hacia el ambiente que lo rodea.

Esta disipación de energía se debe, por ejemplo, al trabajo realizado por las fuerzas de fricción viscosa opositoras al movimiento, que con el transcurrir del tiempo, terminan extinguiendo el movimiento.

Supongamos ahora que, que por algún mecanismo se le repone la energía disipada al sistema, tal como se ilustra esquemáticamente en la siguiente figura.

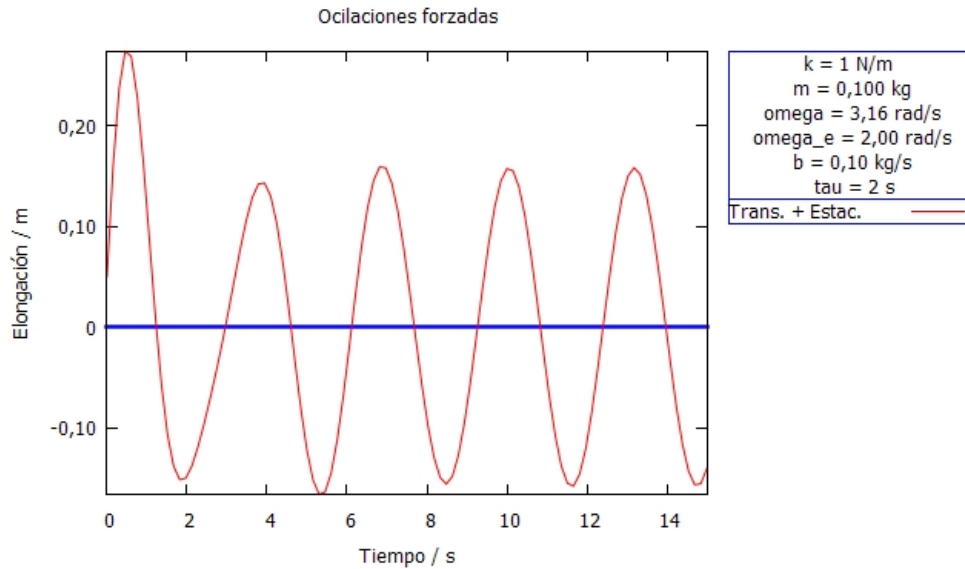


En el caso presente, la reposición de energía se realiza mediante un motor que, mediante un sistema de biela, convierte el movimiento de rotación **uniforme** del volante en uno de oscilación por parte del carrito, como si se tratara de un pistón.

A este movimiento oscilatorio sostenido en el tiempo, se le denomina **oscilación forzada**, y cuando logra establecerse se dice que el carrito está en **régimen o estado estacionario**.

Antes del establecimiento del estado estacionario, el oscilador debe pasar por un **estado transitorio**, que como lo indica su nombre, **pasado cierto tiempo el estado estacionario termina imponiéndose**.

Observando la siguiente gráfica, se podría decir que el régimen estacionario se estaría estableciendo definitivamente a partir de los 6 segundos, y va a perdurar sino se produce ningún cambio.

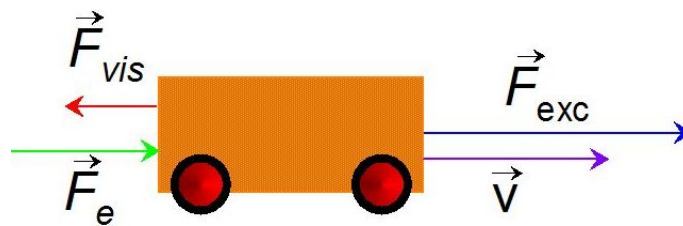


Volviendo al ejemplo de la figura anterior, si ω representa la velocidad de giro del volante, la fuerza ejercida por la biela sobre el carrito, en la situación más sencilla, esta dada por la ecuación:

$$F_{exc} = F_0 \cos \omega t$$

siendo F_{exc} la fuerza excitadora (o forzamiento), y F_0 el máximo valor de dicha fuerza.

En la siguiente figura se representan las tres fuerzas que actúan sobre el carrito en la dirección del movimiento, en el momento en que éste se mueve hacia la derecha, y el resorte esta comprimido.



En este caso, la amplitud de las oscilaciones forzadas del carrito se calcula mediante la ecuación:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

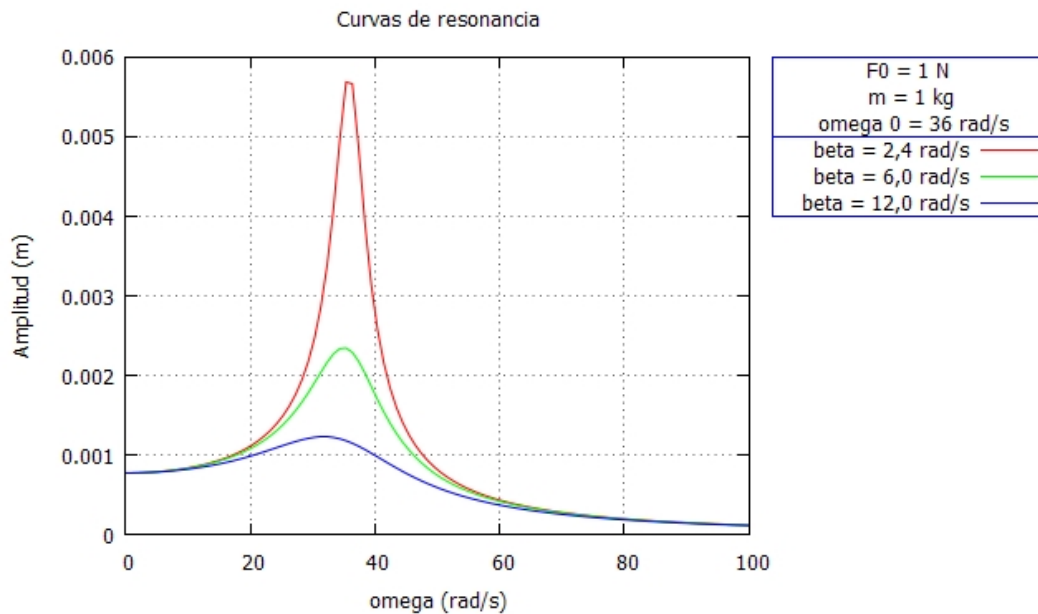
Se puede demostrar teóricamente, y comprobar experimentalmente, que para cierto valor de ω (en este caso, la velocidad de giro del volante), la amplitud de las oscilaciones alcanza su **máximo** valor. Cuando eso ocurre, se dice que el carrito, o en general, el sistema oscilante, se encuentra en **resonancia en amplitud**. A este valor especial de ω se le denomina **frecuencia angular de resonancia en amplitud**, ω_{res} , y su valor se da por:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

De la ecuación anterior se puede deducir que:

Cuanto menor sea el amortiguamiento (β), la frecuencia angular de resonancia (ω_{res}) más próxima se hace a la frecuencia angular natural (ω_0).

En las siguiente gráfica se muestran tres **curvas de resonancia en amplitud**.



Cada curva se obtiene para un valor del coeficiente de amortiguamiento β . Los tres valores de β son: 2,4 rad/s, 6,0 rad/s, y 12,0 rad/s. De la gráfica se puede observar que:

1. si β disminuye, el “pico” en la amplitud A aumenta ($\beta \downarrow \rightarrow A \uparrow$); y
2. si β disminuye, ω_{res} se “a cerca” a $\omega_0 = 36 \text{ rad/s}$ ($\beta \downarrow \rightarrow \omega_{res} \rightarrow \omega_0$).