Reflexión Trasmisión y Polarización Lineal de Ondas Monocromáticas

Índice de refracción y Ley de Snell

Es un hecho experimental que la luz[1] se puede propagar en el vacío, y lo hace a la velocidad[2] $c = 299\,729\,458\,\mathrm{m/s}$. Sin embargo su velocidad se reduce cuando esta se propaga en un medio material (por ejemplo: aire, agua, vidrio, etc.). Sea v la velocidad de propagación de la luz en un medio material.

Se define el **índice de refracción absoluto** del medio como:

$$n = \frac{c}{v}$$

Por otro lado, sabemos que el **módulo** del vector de ondas $\vec{k}$ se da por:

$$k = \frac{\omega}{v}$$

Consideremos ahora dos medios caracterizados por sus respectivos índices de refracción n_1 y n_2. Si se hace coincidir la interfase con el plano coordenado xy, y por lo tanto el eje $\overrightarrow{Oz}$ será perpendicular a la interfase.

Supongamos que tenemos una onda que se propaga en el medio 1 con velocidad v_1 y vector de onda $\vec{k}$. Asumamos que la onda incide en la interfase, con tal de que la dirección del vector de onda $\vec{k}$ forme un ángulo con la dirección del eje $\overrightarrow{Oz}$ igual a θ_i distinto de cero[3]. El plano definido por el vector de onda y la normal a la interfase (en el caso presente el eje $\overrightarrow{Oz}$) se lo denomina **plano de incidencia**.

La onda incidente cuando llaga a la interfase en parte se refleja, y en parte se trasmite (refracta) a través de la interfase para continuar propagándose en el medio 2.

Sean θ_r y θ_t los ángulos formados por las direcciones de los vectores de ondas $\vec{k}''$ (reflejado) y $\vec{k}'$ (trasmitido) respecto a la dirección del eje $\overrightarrow{Oz}$.

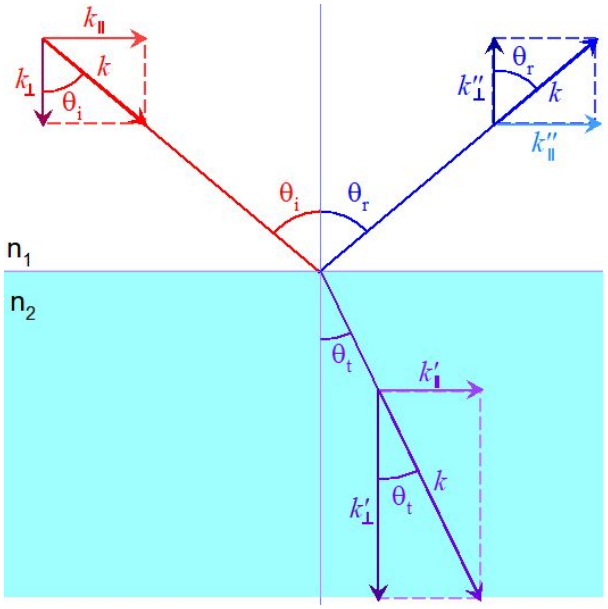
En este punto cabe señalar que los vectores de ondas $\vec{k}$, $\vec{k}'$ y $\vec{k}''$ están contenidos en el plano de incidencia, que para fijar ideas lo podemos hacer coincidir con el plano xz.

Ahora bien, el vector de onda $\vec{k}$ se puede descomponer en una componente perpendicular a la **interfase**, $\vec{k}_\perp$, y en otra paralela (tangente) a la interfase, $\vec{k}_\parallel$, cuyos módulos se dan por:

[1] O cualquier otra onda electromagnética.

[2] La velocidad c es una constante universal. Mas aun, según la teoría especial de la relatividad, nada que se mueva puede superarla.

[3] Si $0° < \theta_i < 90°$, se dice que la incidencia es oblicua, y si $\theta_i = 0°$ la incidencia es **normal**.



$$\begin{aligned} k_\perp &= \frac{\omega}{v}\cos\theta_i \\ &= n_1\frac{\omega}{c}\cos\theta_i \\ k_\parallel &= \frac{\omega}{v}\sin\theta_1 \\ &= n_1\frac{\omega}{c}\sin\theta_i \end{aligned}$$

De forma análoga se tiene que los módulos de las componentes del vector de onda reflejada:

$$\begin{aligned} k''_\perp &= n_1\frac{\omega}{c}\cos\theta_r \\ k''_\parallel &= n_1\frac{\omega}{c}\sin\theta_r \end{aligned}$$

y los módulos de las componentes del vector de onda trasmitido se dan por:

$$\begin{aligned} k'_\perp &= n_2\frac{\omega}{c}\cos\theta_t \\ k'_\parallel &= n_2\frac{\omega}{c}\sin\theta_t \end{aligned}$$

En los cursos superiores se demuestra que los módulos de las componentes **paralelas (= tangenciales) a la interfase** de los respectivos vectores de ondas son iguales, y así como también las respectivas frecuencias[4], es decir:

$$k_\parallel = k''_\parallel = k'_\parallel, \qquad \omega = \omega'' = \omega'$$

y de aquí se deducen las leyes de la reflexión y de Snell:

$$n_1\frac{\omega}{c}\sin\theta_i = n_1\frac{\omega}{c}\sin\theta_r \quad \Rightarrow \quad \theta_i = \theta_r \quad \text{(2da. de la reflexión)}$$

$$n_1\frac{\omega}{c}\sin\theta_i = n_2\frac{\omega}{c}\sin\theta_t \quad \Rightarrow \quad n_1\sin\theta_i = n_2\sin\theta_t \quad \text{(ley de Snell)}$$

[4] y por lo tanto, las respectivas frecuencia cíclicas.

Mas aun, combinando la última ecuación con la definición de índice de refracción se obtienen nuevas expresiones de la ley de Snell, es decir:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

de donde se deducen las siguientes ecuaciones:

$$v_2 \sin\theta_i = v_1 \sin\theta_t, \qquad n_1 v_1 = n_2 v_2, \qquad n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$$

Reflexión interna total

El módulo del vector de onda trasmitido se da por:

$$\begin{aligned} k' &= n_2\frac{\omega}{c} && (1)\\ &= \sqrt{(k'_\parallel)^2 + (k'_\perp)^2} && (2)\end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$k'_\perp = \sqrt{\left(n_2\frac{\omega}{c}\right)^2 - (k'_\parallel)^2}$$

Por otro lado, de la sección anterior, se sabe que:

$$\begin{aligned} k'_\parallel &= k_\parallel && (3)\\ &= n_1\frac{\omega}{c}\sin\theta_i && (4)\end{aligned}$$

que sustituyendo en la ecuación anterior resulta:

$$k'_\perp = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}$$

Ahora, cabe la posibilidad de que $n_1 > n_2$, y que por lo tanto exista un ángulo de incidencia, llamado **ángulo crítico**[5], θ_c, a partir del cual se verifica:

$$n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i \leq 0 \quad \forall\theta_i \geq \theta_c$$

donde la igualdad se da para el caso particular en que el ángulo de incidencia sea igual al ángulo crítico ($\theta_i = \theta_c$), es decir:

$$n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{o bien:} \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Sustituyendo $\sin\theta_i = \sin\theta_c = \dfrac{n_2}{n_1}$ en la ley de Snell se verifica que:

$$1 = \sin\theta_t \quad \Rightarrow \quad \theta_t = 90^\circ$$

[5] O ángulo de corte

de donde se deduce que el ángulo crítico es **el ángulo de incidencia para el cual el ángulo de trasmisión vale** 90°.

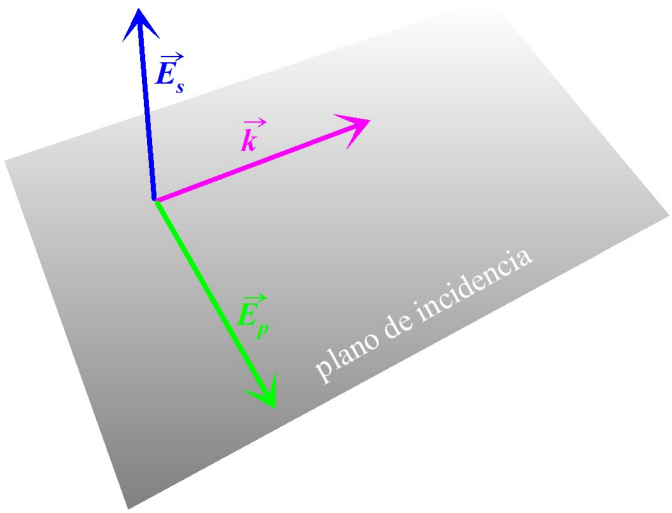
Notar que para ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico ($\theta_i > \theta_c$), la componente perpendicular de vector de onda trasmitida ($k'_\perp$) se convierte en una cantidad imaginaria pura. Así del otro lado de la interfase, en el medio 2, la onda se propagará en direcciones tangenciales a la interfase, o dicho de otra forma, en el medio 2 se tendrá una onda "rasante" a la interfase. A este tipo de ondas se las denomina **evanescentes**, pues solo logran atravesar perpendicularmente en el medio 2 una distancia igual a unas pocas longitudes de ondas, y consecuentemente, no existirá propagación de energía en la dirección perpendicular a la interfase. Así un observador ubicado en el medio 2, si se trata de ondas luminosas (sonoras), no será capaz de ver (oír) luz (sonido) alguna (o). Solo un observador situado en el medio 1 podrá ver (oir) la onda reflejada, por esta razón a este fenómeno se le llama **reflexión interna total**.

Por último, observar que cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo crítico se produce el máximo ángulo de refracción (=transmisión).

Coeficientes de Fresnel y Ángulo de Brewster

Tanto el campo $\vec{E}$ como el $\vec{H}$ de una OAP electromagnética (luz), pueden estar polarizados linealmente en una direcciones especiales, como en la dirección de los ejes coordenados. Sin embargo no es la norma, y ambos campos suelen estar polarizados linealmente en direcciones "no privilegiadas". En tal caso el vector campo $\vec{E}$ se puede descomponer en dos componentes mutuamente perpendiculares: E_p (polarización-p) como la componente paralela al **plano de incidencia**, y $\vec{E}_s$ (polarización-s) como la componente perpendicular[6] a dicho plano. En tal caso se cumple que:

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_s$$



Como ya se sabe, la OAP al incidir sobre una interfase con un ángulo θ_i , en parte se refleja con un ángulo $\theta_r = \theta_i$, y en parte se trasmite al otro medio con un ángulo $\theta_t = \arctan\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)$, siendo n_1 y n_2 los índices de refracción de cada medio. En tal caso el campo eléctrico de la onda reflejada se da por:

[6] La "s" del subíndice hace referencia a la palabra alemana «senkrecht», que significa perpendicular.

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_p + \vec{E}''_s \quad (\text{“E dos primas”})$$

y el de la onda trasmitida:

$$\vec{E}' = \vec{E}'_p + \vec{E}'_s \quad (\text{“E una prima”})$$

Se definen los **coeficientes de Fresnel** como:

$$r_p \equiv \frac{E''_p}{E_p}, \quad r_s \equiv \frac{E''_s}{E_s}, \quad t_p \equiv \frac{E'_p}{E_p}, \quad t_s \equiv \frac{E'_s}{E_s}$$

Es decir, los coeficientes de **reflexión**, r_p y r_s, **vinculan** las intensidades máximas (= amplitudes) de los campos eléctricos de las componentes “p” y “s” de la onda reflejada, E''_p y E''_s, con las intensidades máximas (= amplitudes) respectivas de la onda incidente, E_p y E_s.

Análogamente con los coeficientes de **trasmisión**, t_p y t_s: vinculan las intensidades máximas (= amplitudes) de los campos eléctricos de las componentes “p” y “s” de la onda trasmitida, E'_p y E'_s, con las intensidades máximas (= amplitudes) de los campos electricos de la onda incidente E_p y E_s.

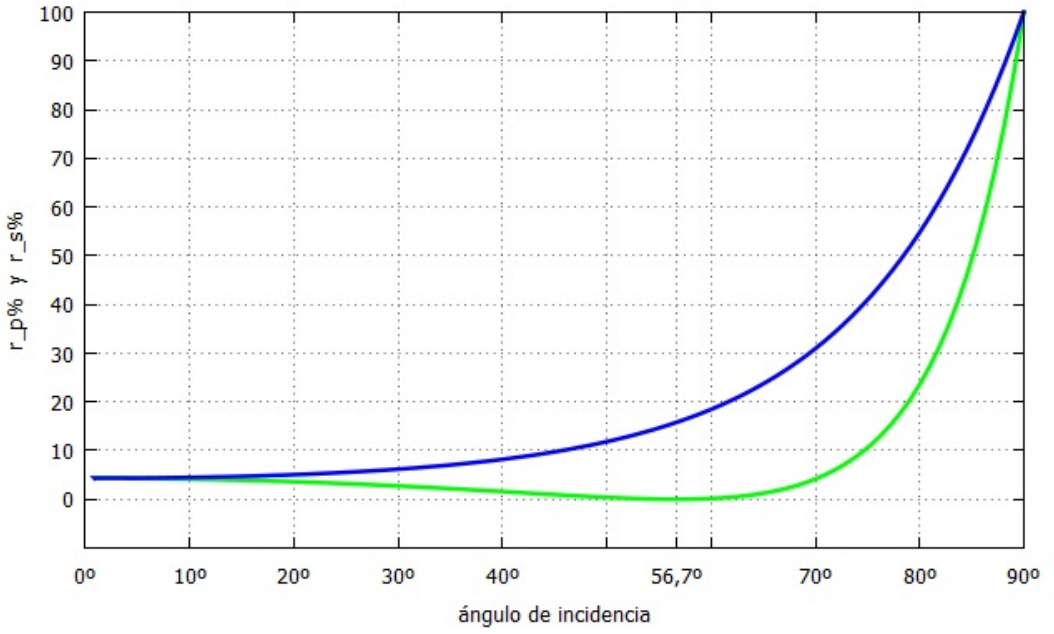
Explícitamente, y en una de sus “versiones”, los coeficientes de Fresnel en función de los ángulos de incidencia (θ_i) y de trasmisión (θ_t), están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \qquad r_s = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

$$t_p = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_t + \theta_i)\cos(\theta_t - \theta_i)} \qquad t_s = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

A continuación se muestran dos gráficas que muestran como varían “**porcentualmente**” los coeficientes $r_p \times 100\,\%$ (en verde) y $r_s \times 100\,\%$ (en azul), cada uno en función del **ángulo de incidencia**[7] θ_i, cuándo éste varía entre 0° y 90°. Para este caso concreto, la luz incide desde el vacío ($n_1 = 1{,}00$) con ángulos crecientes de 0° hasta 90°, sobre la interfase a partir de la cual el otro medio es un tipo de vidrio ($n_2 = 1{,}52$).

[7]Según las ecuaciones dadas para r_p y r_s, estos coeficientes dependen de los ángulos θ_i y θ_t, pero no perder de vista que el ángulo θ_t depende a su vez del ángulo θ_i, dependencia dada por la ley de Snell.



Observando la gráfica, tanto la luz incidente y como la reflejada están en general "p-polarizadas" y "s-polarizadas". Sin embargo, observando con más atención la gráfica correspondiente a $r_p \times 100\,\%$, existe para esta situación concreta, un valor para el ángulo de incidencia $\theta_i \cong 56{,}7°$, para el cual r_p se hace cero ($0\,\%$). Sabemos que:

$$r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

y cuando $\theta_i + \theta_t = 90°$, la tangente de 90° en el denominador de la ecuación anterior se hace ¡¡¡infinita!!!, es decir: "$\tan(\theta_i + \theta_t) = \infty$", y por lo tanto $r_p = 0$ y consecuentemente para este ángulo de incidencia (en este caso concreto $\theta_i = 56{,}7°$) la luz reflejada "pierde" su componente "p" (polarización-p).

Dicho de otra forma: en este ejemplo concreto, para el angulo de incidencia $\theta_i = 56{,}7°$, la intensidad máxima (= amplitud) del campo eléctrico de la componente paralela de la luz reflejada, E_p'' se hace nula.

Hablando en general, existe un valor de ángulo de incidencia θ_i que cumple la condición $\theta_i + \theta_t = 90°$, para el cual $r_p = 0$, y por lo tanto la luz reflejada solo queda con la componente "s" (s-polarizada). A este valor de ángulo de incidencia se le denomina **ángulo de Brewster** (θ_B).

No perder de vista que los ángulos θ_i y θ_t están vinculados entre sí mediante la ley de Snell:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

Cuando $\theta_i = \theta_B$, entonces se cumple que: $\theta_B + \theta_t = 90°$, o lo que es lo mismo:

$$\theta_t = 90° - \theta_B$$

sustituyendo esta última ecuación en la ley de Snell, resulta que:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin(90° - \theta_B)$$

Por una propiedad trigonométrica de la función seno, resulta que: $\sin(90° - \theta_B) = \cos\theta_B$, por lo que la ley de Snell se convierte en:

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \cos\theta_B$$

de donde se deduce que:

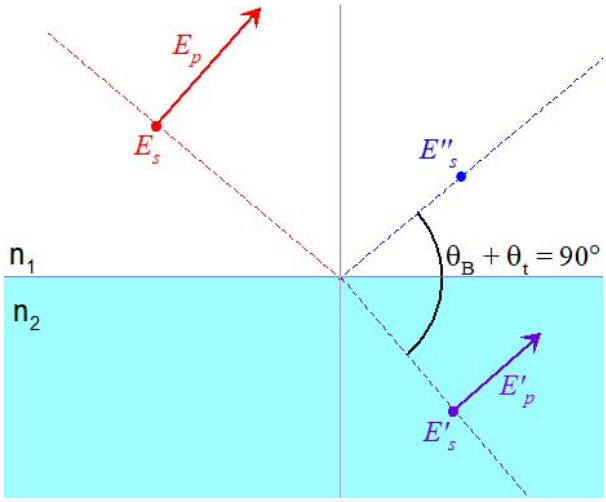
$$\frac{\sin\theta_B}{\cos\theta_B} = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

finalmente el ángulo de Brewster se puede calcular mediante la ecuación:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

y cuando:

$$\theta_i = \theta_B \quad \Rightarrow \quad r_p = 0 \quad \Rightarrow \quad E''_p = 0$$



En la figura de arriba, los puntos representan los vectores $\vec{E}_s$, $\vec{E}'_s$ y $\vec{E}''_s$. Notar que el vector $\vec{E}''_p$ no esta presente en la figura.